MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 1 ($f \to$ matrice)**.** Déterminer les matrices dans les bases canoniques des applications linéaires suivantes :

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\qquad f(x,y) = (x+3y, 2y)$
2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $\qquad f(x,y,z) = (-x+2z, 3x-4y, -5x+6z, -7y+8z)$
3) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\qquad f(P) = P(X+1) - P(X)$
4) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\qquad f(P) = P(1)$
5) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (matrice $\to f$)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ deux morphismes dont les matrices dans les bases canoniques sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer, les expressions de f et de g. Lorsque c'est possible, déterminer les matrices dans les bases canoniques de $f+g$, de $f \circ g$, de $g \circ f$, de f^{-1}, de g^{-1}, de $(f \circ g)^{-1}$ et de $(g \circ f)^{-1}$.

Exercice 3. Déterminer les matrices dans les bases canoniques des applications linéaires suivantes. Montrer que ce sont des isomorphismes, et déterminer les matrices de leurs applications réciproques.

1) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par $\qquad f(P) = (P(1), P(2), P(3))$
2) $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\qquad f(P) = P(X+1)$
3) $\Phi : E \to E$ définie par $\qquad \Phi(f) = f' - f$, où $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$

Exercice 4 (*Endomorphismes nilpotents*)**.** Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$, où l'on note $u^k := \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

1) Justifier l'existence de $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $u^2(a) \neq 0_E$.
2) Démontrer que $\mathcal{B} = (a, u(a), u^2(a))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
4) En déduire que $\left\{ v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid v \circ u = u \circ v \right\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, u^2)$, où on note $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Changements de base(s)

Exercice 5. Soit $\mathcal{B} = ((1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1))$ une base de $\mathbb{R}^4$. Déterminer les coordonnées de $u = (2,1,-3,4) \in \mathbb{R}^4$ selon $\mathcal{B}$.

Exercice 6. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est :

$$M = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \qquad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3 \qquad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 7.

1) On note $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice P est une matrice de passage de la base canonique à une autre base $\mathcal{B}$ qu'on précisera.
2) On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x,y,z) = (2x+2y+z, -2x-y, x+y-z)$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}$. En déduire $f \circ f \circ f$.

Exercice 8. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est semblable à B^k.

Un peu de tout

Exercice 9. Déterminer le rang, le noyau et l'image des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) = \operatorname{Ker} D \oplus \operatorname{Im} D$.

Exercice 10. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G, avec

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\right\} \qquad G = \operatorname{Vect}((1,1,1))$$

1) Déterminer une base $\mathcal{B}$ adaptée à F et G.
2) Donner la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.
3) En déduire une expression de p.

Exercice 11. On pose $S = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 6 & 7 & 6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et s l'endormorphisme canoniquement associé à S.

1) Montrer que s est une symétrie.
2) Déterminer ses éléments caractéristiques.
3) En déduire une base $\mathcal{B}$ pour laquelle $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$ est simple et donner cette matrice.

Exercice 12. En utilisant la trace, montrer qu'il n'existe pas deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 13. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) On suppose que $\operatorname{Tr}(AA^\top) = 0$. Montrer que $A = 0$.
2) On suppose que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\operatorname{Tr}(AM) = \operatorname{Tr}(BM)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 14 ($\star$). Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{R})$

1) À quelle condition sur $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ la matrice D est-elle la matrice d'un projecteur ? D'une symétrie ?
2) Montrer que tout projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ ou symétrie $s \in \mathcal{L}(E)$ peut être représenté par une matrice diagonale dans une base bien choisie. *(Cette matrice vérifie alors nécessairement la condition trouvée en question 1)*